

第六章 假设检验基础

教学要求

- ❖ **掌握：**不同类型 t 检验的分析与计算过程及其适用条件。
- ❖ **熟悉：**假设检验的概念与原理、基本步骤、两类错误之间的区别与联系；假设检验功效的意义及计算。
- ❖ **了解：**常用的正态性检验的方法；区间估计与假设检验之间的关系。

第一节 假设检验的概念与原理

一. 假设检验的思维逻辑

假设检验 (**hypothesis test**) 过去亦称显著性检验 (**significance test**)。

假设检验是先对总体参数或分布作某种假设，然后用适当方法根据样本对总体所提供的信息，推断此假设应拒绝否。

二、假设检验的基本步骤：

例6-1 在某市城区6所小学按概率抽样方法抽取了400名小学生进行视力干预方法研究。基线调查时，干预组200人，屈光度均数为-0.34D，标准差为0.12D，对照组200人，屈光度均数为-0.57D，标准差为0.36D，试问干预组与对照组小学生屈光度在基线时总体均数有无差别？

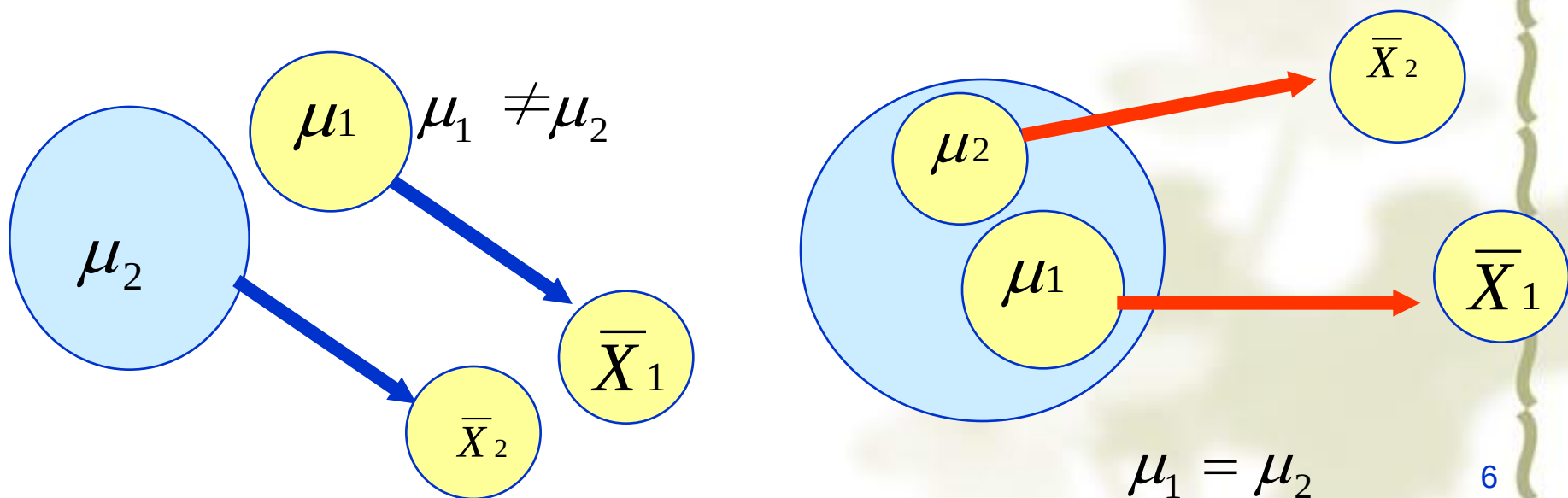
已知： $\bar{x}_1 = -0.34$ $\bar{x}_2 = -0.57$ $s_1 = 0.12$ $s_2 = 0.36$ $n = 200$

从统计学角度考虑两组小学生屈光度有差别有两种可能：1) 差别是由于抽样误差引起的，统计学上称为无差异性。2) 差异是本质上的差异，即二者来自不同总体，统计学上称为差异。

已知： $\bar{x}_1 = -0.34$ $\bar{x}_2 = -0.57$ $s_1 = 0.12$ $s_2 = 0.36$ $n = 200$

造成两者不等的原因： ①同一总体，即 $\mu_1 = \mu_2$ 但有抽样误差存在；

②非同一总体，即 $\mu_1 \neq \mu_2$ 存在本质上的差别，同时有抽样误差存在。



假设检验的基本步骤:

1. 建立检验假设和确定检验水准

假设有两种:

一种是零假设 (**null hypothesis**) 或称原假设, 符号为 H_0 ;

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

另一种是对立假设 (**alternative hypothesis**) , 也称备择假设, 符号为 H_1 , 两者是相互联系且对立的。

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

α 称检验水准(size of test), 过去称显著性水准(significance level), α 通常定为0.05。

$$\alpha=0.05$$

建立假设前, 需先根据分析目的和专业知识明确作单侧检验(one-sided test)还是双侧检验(two-sided test)。通常采用双侧检验, 单侧检验需要非常强的依据支持。

表 4.2 样本均数所代表的未知总体均数 μ 与已知总体均数 μ_0 的比较

目的		H_0	H_1
双侧检验	是否 $\mu \neq \mu_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$
单侧检验	是否 $\mu > \mu_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$
	是否 $\mu < \mu_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$

2.计算统计量

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = 8.57$$

3.确定P值

P值是指在由 H_0 所规定的总体中作随机抽样，获得大于（或等于及小于）现有统计量的概率。

查附表2（P459，t界值表）：

$$z_{0.05/2}=1.96$$

$$\text{今 } z > z_{0.05/2} \text{ 故 } P < 0.05$$

4.推断结论

假设检验主要是围绕 H_0 进行的，通过比较P值与检验水准 α 的大小，来对“ H_0 是否真实”作出推断。

如果 $P \leq \alpha$, 则拒绝 H_0 , 接受 H_1 , 可认为 μ_1 与 μ_2 有差异

如果 $P > \alpha$, 则不拒绝 H_0 , 还不能认为 μ_1 与 μ_2 有差异

在 $\alpha=0.05$ 水准上, 拒绝 H_0 , 接受 H_1 , 可以认为两组小学生屈光度有差别。

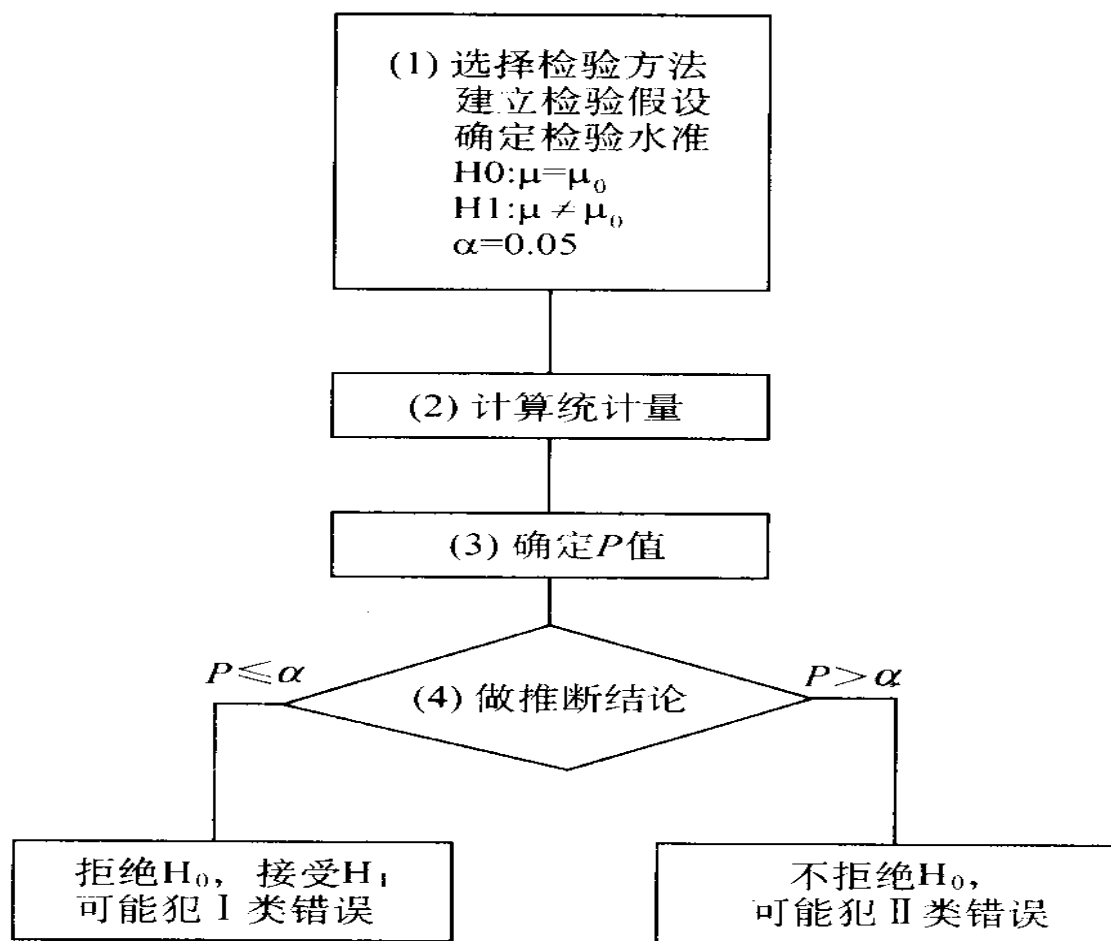


图 6-1 假设检验示意图

第二节 t 检验

t检验的用途：检验定量资料中单样本资料与总体资料、配对设计资料以及两组独立样本资料的差异。

一. 单样本资料的t检验

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \quad \nu = n - 1$$

适用范围：正态。

例 成年男子血红蛋白的平均值为**155g/L**，为了检验高原地区男子血红蛋白水平与一般成年男子有差别，某研究所随机抽取**41**名高原地区成年男性进行检查，其血红蛋白均数为**165g/L**，标准差为**25g/L**。高原地区男子血红蛋白水平与一般成年男子是否有差别？

特别点：

$H_0: \mu = \mu_0$, 高原地区男子血红蛋白水平与一般成年男子相同

$H_1: \mu \neq \mu_0$, 高原地区男子血红蛋白水平与一般成年男子不同

$\alpha = 0.05$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{165-155}{25/\sqrt{41}} = 2.56$$

$$t_{0.05/2,40} = 2.021 < 2.56, \text{故 } P < 0.05$$

按 $\alpha=0.05$ 检验水准，可认为高原地区成年男子血红蛋白水平与一般成年男子有差别，且高原高原地区成年男子血红蛋白水平高于一般成年男子。

二. 配对设计资料的t检验

配对（**matched pair**）设计即除处理因素外，其它影响因素（非处理因素）尽量一致，目的是减小抽样误差。如同一受试对象处理前后比较；同一受试对象两个部位的比较，两个部位分别接受两种处理；同一受试对象分别接受两种处理；非处理因素尽量一致的两个受试对象分别接受两种处理等。

特点： $H_0: \mu_d = 0$

$H_1: \mu_d \neq 0$

$$t = \frac{|\bar{d} - \mu_d|}{s_{\bar{d}}} = \frac{|\bar{d} - 0|}{s_{\bar{d}}} = \frac{|\bar{d}|}{s_d / \sqrt{n}}$$

$$v = n - 1$$

d 为每对数据的差值

$\bar{d}$ 为差值的样本均数

S_d 为差值的标准差

$s_{\bar{d}}$ 为差值样本均数的标准误

n 为对子数

适用范围：差值正态。

例6-2 (P106)

表6—2 15对孪生兄弟的出生体重 (kg)

序号	先出生者体重	后出生者体重	差值	序号	先出生者体重	后出生者体重	差值
1	2.79	2.69	0.10	8	2.48	2.55	-0.07
2	3.06	2.89	0.17	9	3.30	2.82	0.21
3	2.34	2.24	0.10	10	3.07	3.05	0.02
4	3.41	3.37	0.04	11	3.61	3.58	0.03
5	3.48	3.5	-0.02	12	2.69	2.66	0.03
6	3.23	2.93	0.30	13	3.09	3.20	-0.11
7	2.27	2.24	0.03	14	2.98	2.92	0.06
				15	2.65	2.60	0.05

1.建立检验假设，确定检验水准

$H_0: \mu_d = 0$ 即先出生者与后出生者体重的差值的总体均数为0

$H_1: \mu_d \neq 0$ 即先出生者与后出生者体重的差值的总体均数不为0

$$\alpha = 0.05$$

2.计算统计量

$$t = \frac{|\bar{d}|}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{0.06 - 0}{0.10 / \sqrt{15}} = 2.33 \quad \nu = n - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$t_{0.05, 14} = 2.145$$

3.确定P值，作出判断 今 $t > t_{0.05, 14}$ 故 $P < 0.05$

在 $\alpha = 0.05$ 水准上，拒绝 H_0 ，接受 H_1 ，可认为先出生者与后出生者体重有差别。

例6—3 (P107)。

表6-3 两种方法测定血清 Mg^{2+} (mmol/L) 的结果

试样号	甲基百里酚蓝(MTB)法	葡萄糖激酶两点法	差值
1	0.94	0.92	-0.02
2	1.02	1.01	-0.01
3	1.14	1.11	-0.03
4	1.23	1.22	-0.01
5	1.31	1.32	0.01
6	1.41	1.42	0.01
7	1.53	1.51	-0.02
8	1.61	1.61	0
9	1.72	1.72	0
10	1.81	1.82	0.01
11	1.93	1.93	0
12	2.02	2.04	0.02

$$H_0: \mu_d = 0 \quad H_1: \mu_d \neq 0 \quad \alpha = 0.05$$

$$t = \frac{|\bar{d}|}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{|-0.0033|}{0.01497 / \sqrt{12}} = 0.764 \quad \nu = n - 1 = 12 - 1 = 11$$

$$t_{0.05/2, 11} = 2.201 \quad \text{今 } t < t_{0.05/2, 11} \text{ 故 } P > 0.05$$

$$t_{0.20, 11} = 1.363 \quad \text{或 } t < t_{0.20/2, 11} \quad P > 0.20$$

在 $\alpha = 0.05$ 水准上，不拒绝 H_0 ，还不能认为这两方法测定结果不同。

三. 两独立样本资料的t检验

1. 应用条件：两资料均呈正态，两总体方差齐同。

特点： $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$

$$\alpha=0.05$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_c \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad s_c^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\nu = n_1 + n_2 - 2$$

例6-4 (P108)

某医师要观察两种药物对原发性高血压的疗效，将诊断为Ⅱ期高血压的**20**例患者随机分为两组（两组患者基线时血压之间的差别没有统计学意义），一组用卡托普利治疗，一组用尼莫地平治疗，**3**个月后观察舒张压下降幅度，结果如下，试比较两药的降压效果有无差异。

卡托普利组 (**X1**) : 12 17 13 8 4 10 9 12 10 7

尼莫地平组 (**X2**) : 11 8 12 13 9 10 8 0 7 16

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \alpha = 0.05$$

$$s_c^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10 - 1) \times 3.58^2 + (10 - 1) \times 4.27^2}{10 + 10 - 2} = 15.52$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_c^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{10.20 - 9.4}{\sqrt{15.52(1/10 + 1/10)}} = 0.454$$

$$\nu = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$$

$$t_{0.05, 18} = 2.101 \quad \text{故} \quad P > 0.05$$

在 $\alpha = 0.05$ 水准上，不拒绝 H_0 ，差异无统计学意义。

2. 双正态，但方差不齐（即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ）

特点：

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{(S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2)^2}{\frac{S_{\bar{x}_1}^4}{n_1 - 1} + \frac{S_{\bar{x}_2}^4}{n_2 - 1}}$$

t { t 检验：双正态，两总体方差相等（齐同）
 t' 检验：双正态，两总体方差不等（不齐）

四、两组独立样本资料的方差齐性检验

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$F = \frac{S_1^2(\text{较大})}{S_2^2(\text{较小})}$$

$$\nu_1 = n_1 - 1$$

$$\nu_2 = n_2 - 1$$

例6-6 (P111)

某口腔医院选择所在市**40-50岁慢性牙周炎患者36例**，测得吸烟族（**18人**）菌斑指数均值为**84.71**、标准差为**8.14**；非吸烟族（**18人**）菌斑指数均值为**82.20**，标准差为**6.18**，试检验两总体方差是否相等？

假定两资料都呈正态分布。
首先对两资料的总体方差进行齐性检验。

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \alpha = 0.05$$

$$F = \frac{s_1^2}{S_2^2} = \frac{8.14^2}{6.18^2} = 1.7349 \quad V_1 - n_1 = 18 - 1 = 17, v_1 = n_2 = 18 - 1 = 17$$

查附表3.2 得 $F_{0.05/2, (17, 17)} = 2.67$ 故 $P > 0.05$

在 $\alpha = 0.05$ 水平上，不拒绝 H_0 ，可以认为两个总体方差相等。

第三节 二项分布与Poisson分布的 Z检验（自学）

第四节 假设检验与区间估计的关系

1. 置信区间具有假设检验的主要功能

(1) 双侧置信区间等价于双侧假设检验

例6-2 (P106)。

对每对孪生兄弟出生体重差值的总体均数做区间估计。

$$\bar{d} \pm t_{0.05/2,14} \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 0.06 \pm (2.145) \frac{0.10}{\sqrt{15}} = (0.0046, 0.1154)$$

双侧置信区间：不包含0，上下界值都大于0，说明增高。

显然, $H_0: u_d = 0$ 不在此区间内。这与按照 $\alpha = 0.05$ 水准拒绝 H_0

的推论结论是等价的。

2. 置信区间可提供假设检验没有提供的信息

置信区间还可提示差别是否具有实际意义。

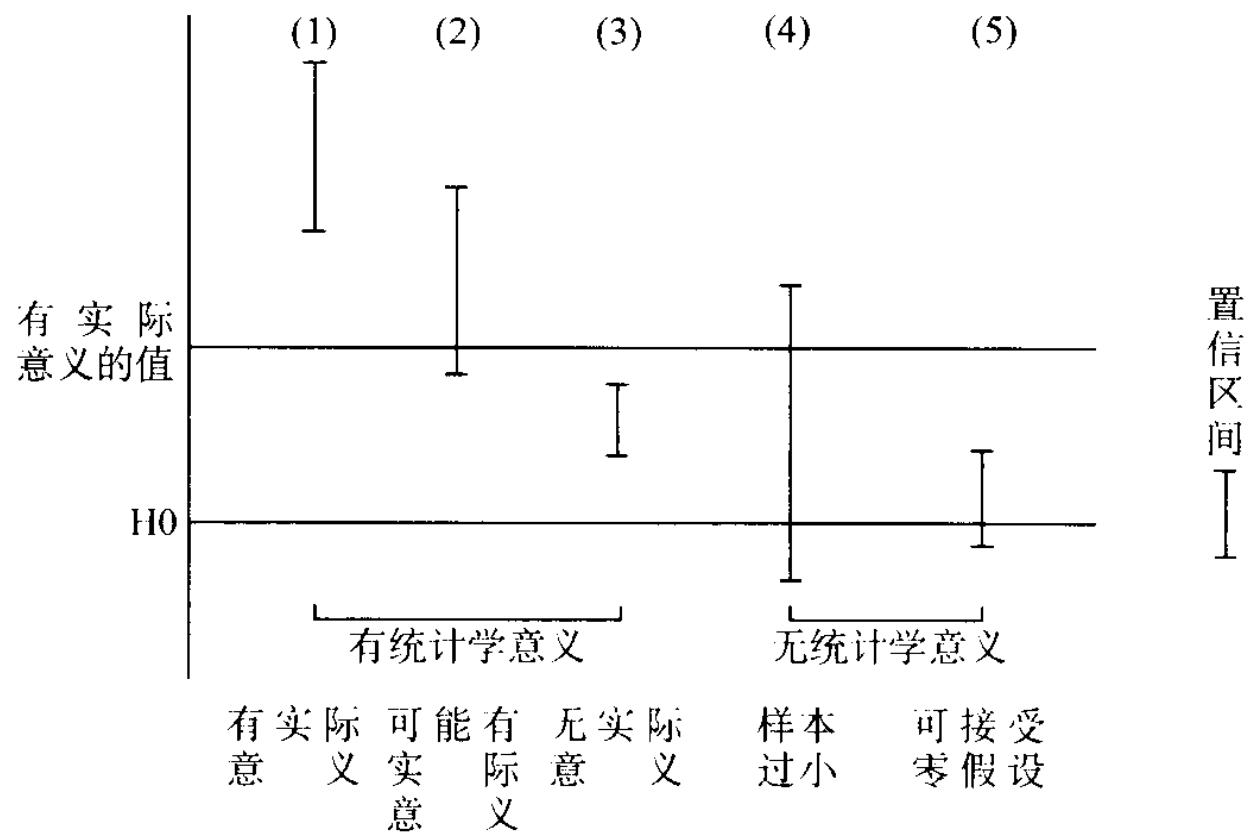


图 6-3 置信区间可以提供的信息

3. 假设检验可提供置信区间不提供的信息

假设检验可报告确切的**P**值。

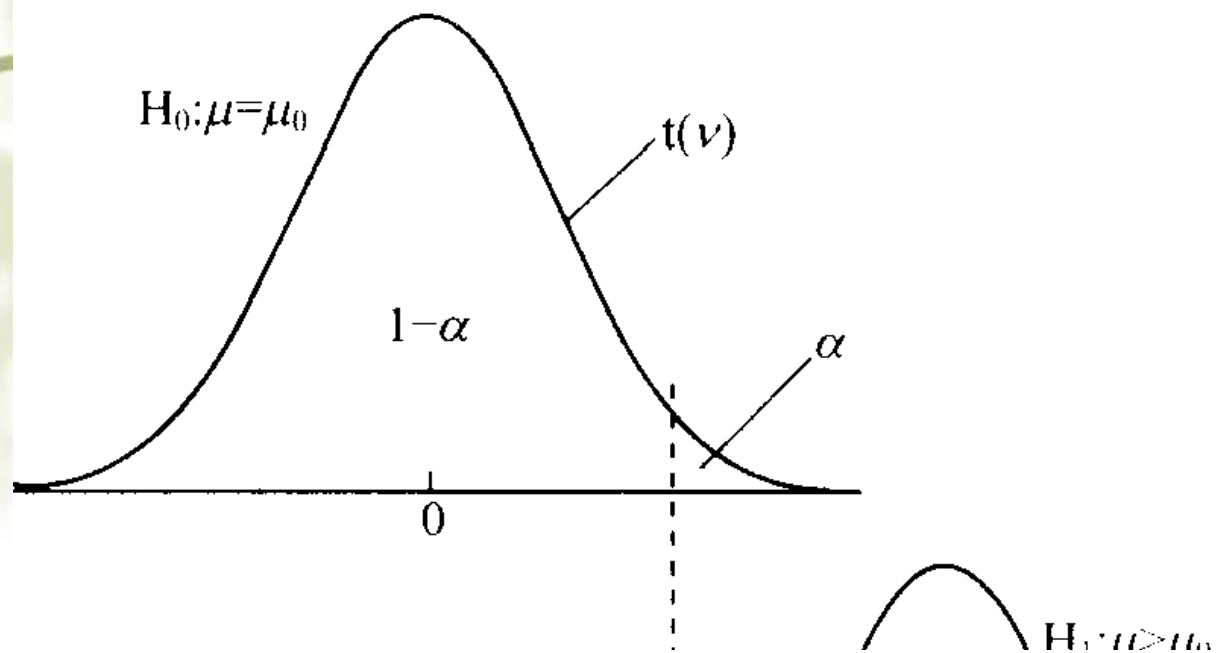
假设检验还可以对 检验功效作出估计。

第五节 假设检验的功效

一、假设检验的两类错误

表 6-3 推断结论和两类错误

实际情况	检验结果	
	拒绝 H_0	不拒绝 H_0
H_0 真	第 I 类错误 (α)	结论正确 ($1 - \alpha$)
H_0 不真	结论正确 ($1 - \beta$)	第 II 类错误 (β)



拒绝了实际上成立的 H_0 ，这类“弃真”的错误称为第 I 类错误，或 I 型错误（**type I error**）。其概率用 α 表示。易确定，是人为选定的。

不拒绝实际上不成立 H_0 的，这类“存伪”的错误称为第 II 类错误，或 II 型错误（**type II error**）。其概率用 β 表示。大小很难确定，但与之间存在规律性的变化。当样本含量确定时， α 越小， β 越大；反之 α 越大， β 越小。

二、假设检验的功效

$1-\beta$ 成为假设检验的功效，功效高的检验方法首选。

何时报告功效：

- 如果结果呈阳性，不需要报告功效；
- 如果结果呈阴性，需要报告；报告功效的目的是为了确保检验结果呈阴性是否是真的阴性，是由于抽样误差导致还是由样本例数小导致，当功效 > 0.8 时，可有很好地理理由证实阴性结果是真实的。

影响检验功效的因素：

- 总体参数差异 ↑
- 个体差异（标准差） ↓
- 样本量 ↑
- 检验水准 α ↑

三、应用假设检验需要注意的问题

1. 应用检验方法必需符合其适用条件
2. 权衡两类错误的危害以确定 α 的大小。
3. 正确理解P值的意义，不要将很小的P值误解为总体参数间差异很大，P值越小，说明越有理由认为二者之间有差异。

第六节 正态性检验

(一) 图示法

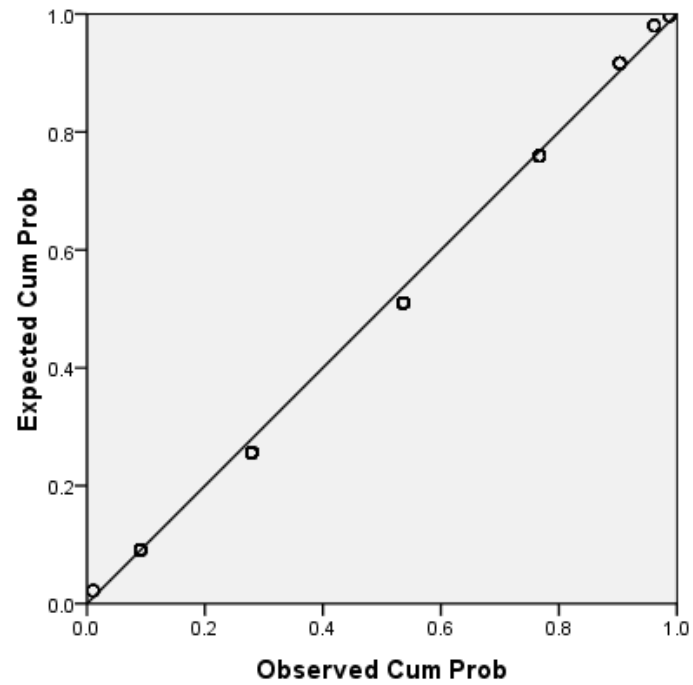
1. P-P图法

以样本的累计频率（百分比）作为横坐标，以按正态分布计算的相应累计频率作为纵坐标，绘散点图，呈线性分布即为正态分布。

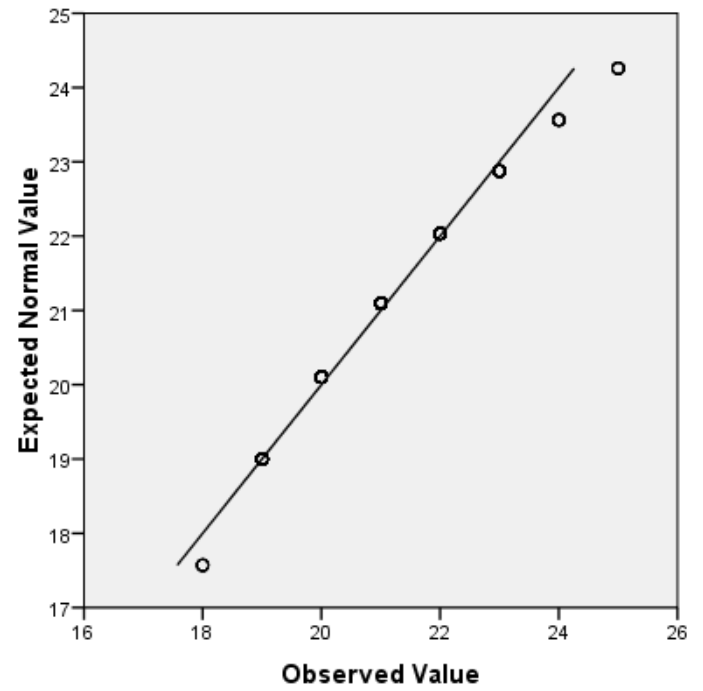
2. Q-Q图法

以样本的百分位数（ P_X ）作为横坐标，以按正态分布计算的相应百分位数作为纵坐标，绘散点图，呈线性分布即为正态分布。

Normal P-P Plot of 总体



Normal Q-Q Plot of 总体



(二) 统计检验法

1. W检验 (Shapiro-Wilk)

2. D检验

3. 矩法

小结

- 单样本资料t检验的适用条件：随机设计、正态分布
- 配对设计资料t检验的适用条件：差值呈正态分布
- 两独立样本资料的t检验的适用条件：两资料均正态分布，方差齐性（要求不高，软件都可以计算）
- 正态分布如何检验
- 假设检验中的两类错误

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_c \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$t = \frac{|\bar{d} - \mu_d|}{s_{\bar{d}}} = \frac{|\bar{d} - 0|}{s_{\bar{d}}} = \frac{|\bar{d}|}{s_d / \sqrt{n}}$$

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$